12/10/2018

$A \cdot B = A \cdot C \not\Rightarrow$ για $A \neq O_{m\times n}$

Όταν $A = I_{m\times m} \Rightarrow B = C$

$\alpha b = \alpha \cdot c \Rightarrow \alpha b - \alpha c = 0$

$\alpha(b-c) = 0$

Αν $\alpha \neq 0$ $\exists \alpha^{-1}$ $\alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot (b-c) = \alpha^{-1} \cdot 0$

$(b-c) = 0$

$b = c$

$A \cdot B - A \cdot C = O_{m\times n}$

$A(B-C) = O_{m\times n}$

Αν $\exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot (B-C) = A^{-1} O_{m\times n}$

$I(B-C) = O_{m\times n}$

$B = C$ //

Αλλά π.χ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο.

Συστήματα.

Μια γραμμική εξίσωση n μεταβλητών έχει μορφή

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

όπου $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ είναι αριθμοί π.χ. $3x_1 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = -7$

$3x_1^2 - \sqrt{2}x_2 + x_3 = -7$ όχι

$3\sqrt{x_1} - \sqrt{2}x_2 + x_3 = -7$ όχι

Λύση της εξίσωσης είναι μια ακολουθία αριθμών $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ οι οποίοι επαληθεύουν την εξίσωση.

π.χ. Να λυθεί η $x_1 - 7x_2 = 3$

$(10, 1)$

$(17, 2)$

Η λύση δίνεται από $x_1 = 3 + 7x_2$ με το x_2 να λαμβάνει οποιαδήποτε τιμή. Δηλαδή έχει άπειρες λύσεις

π.χ. Να λυθεί $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$

$(0, 0, 0)$

$(1, 1, 5)$

$(3, -2, 0)$

$x_3 = 2x_1 + 3x_2$ επίπεδο.

με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Άπειρες λύσεις

Ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων και n αγνώστων έχει μορφή:

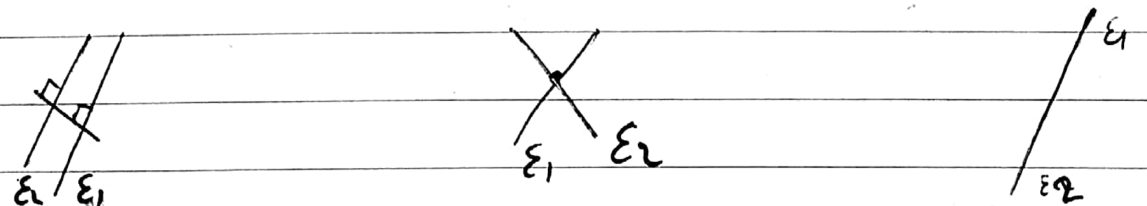
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Μια λύση θα είναι μία n-άδα αριθμών όπου επαληθεύουν όλες τις εξισώσεις.

Αν ένα σύστημα έχει λύση θα καλείται συμβιβαστό.
Κύριο πρόβλημα: Πότε ένα σύστημα έχει λύση και από τι εξαρτάται.

π.χ. $x_1 - 7x_2 = 3$ Να λυθεί το σύστημα.
$2x_1 + x_2 = 0$

i) παράλληλες ii) τέμνουσες iii) ταυτίζονται.



Από τι εξαρτάται η λύση;
- Από συντελεστή διεύθυνσης
- Οι σταθεροί όροι

π.χ. $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$

$x_1+x_2+x_3=7$. Να λυθεί το σύστημα.
$3x_1+x_2+4x_3=10$

Τομή δύο επιπέδων.

• Η τομή είναι ευθεία όταν δεν είναι παράλληλα.
• Δεν $\exists$ τομή, όταν είναι μακριά μεταξύ τους.
• Άπειρες λύσεις όταν ταυτίζονται.

Εξαρτάται από το συντελεστή διεύθυνσης και τους σταθερούς όρους

Τομή επιπέδων

α) Αν το 3ο περιέχει ευθεία // στην κοινή ευθεία, δεν έχουμε λύση. Αν το τρίτο δεν περιέχει ευθεία // στην κοινή ευθεία, τότε αυτό και η ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο. Αυτό θα είναι η μοναδική λύση του συστήματος.
β) Σ' αυτήν την περίπτωση δεν $\exists$ λύση.
γ) Εδώ επανερχόμαστε στην περίπτωση των δύο επιπέδων.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-3x_3&=0\\ x_1+x_2+x_3&=7\\ 3x_1+x_2+4x_3&=10 \end{aligned}\right\} 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$
$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$0x_1 - x_2 - 5x_3 = -14$$
$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$0x_1 - x_2 - 5x_3 = -14$$
$$0x_1 - 2x_2 + x_3 = -11$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$x_2 + 5x_3 = +14$$
$$-2x_2 + x_3 = -11$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$x_2 + 5x_3 = +14$$
$$0x_2 + 11x_3 = -17$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$x_2 + 5x_3 = -14$$

$$\boxed{x_3 = \frac{17}{11}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \text{σειρά } m$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\underset{m \times n}{A} \qquad \underset{m \times 1}{X} \qquad \underset{m \times 1}{B}$$

$ax = b$

$a = 0$, $b = 0$

άπειρες

$a = 0$, $b \neq 0$

καμμία

$a^{-1} \Leftrightarrow a \neq 0$ μία

Αν $\exists A^{-1} \Rightarrow A \cdot A^{-1} X = A^{-1} \cdot B$

$X = A^{-1} \cdot B$

Αν $m \neq n$ $\nexists A^{-1}$ Αλλά λύσεις μπορεί να $\exists$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & -14 \\ 3 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & -14 \\ 0 & -2 & 1 & 11 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{11} \end{pmatrix}$$ Κλιμακωτός ...

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \text{αριθ} \\ 0 & 1 & 0 & \text{αριθ} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{17}{11} \end{array}\right)$$ Ανηγμένος κλιμακωτός.

Ταυτοτικός

Ο πίνακας $A_{m\times n}$ καλείται πίνακας των συντελεστών του συστήματος, ο $B_{m\times n}$ των σταθερών όρων. Ο πίνακας $(A,B)_{m\times(n+1)}$ καλείται ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος.

Σκοπός: Με γραμμοπράξεις να φθάσουμε στον κλιμακωτό. Αν έχει λύση συνεχίζουμε στον Ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα για την λύση.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδης
πίνακας εναλλαγής

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & -14 \\ 3 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδης πίνακας ο οποίος
αθροίζει πολ/σιο κάποιας γραμμής σε κάποια άλλη.

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί γραμμών.

Ορισμός: Έστω $A=(a_{ij})$ είναι $m \times n$ πίνακας. Ονομάζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

i) Πολ/μός της i-γραμμής με α. Γράφουμε $\Gamma_i \to \alpha\Gamma_i$

Στοιχειώδης πίνακας $M_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1_i & & 0 \\ & \alpha & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

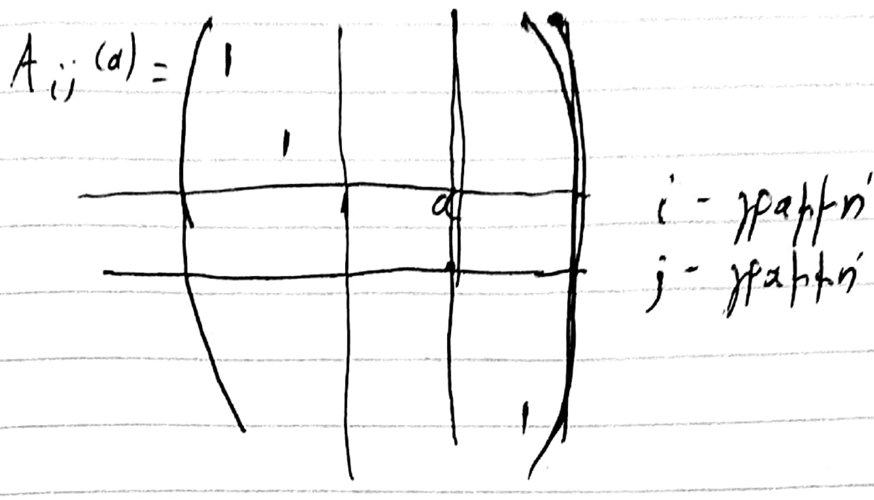
ii) Εναλλάσσουμε την i με την j γραμμή. Γράφουμε $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$

Στοιχειώδης πίνακας $E_{ij} = \begin{pmatrix} 1_i & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1_j \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \\ i \text{ γραμμή} \\ j \text{ γραμμή} \\ \\ \end{matrix}$

iii) Προσθέτουμε στην i-γραμμή πολ/σιο της j-οστής

Γράφουμε $\Gamma_i \to \Gamma_i + \alpha\Gamma_j$

Στοιχειώδης πίνακας



ΠΡΟΤΑΣΗ: Οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί ενός πίνακα A γίνεται με πολ/σμό του αντίστοιχου στοιχειώδη πίνακα από αριστερά.

i) $M_i(a)A$
ii) $E_{ij}A$
iii) $A_{ij}(a)A$

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας πίνακας καλείται κλιμακωτός αν i) Το πρώτο του μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής είναι 1 η οποία καλείται ηγετικό.
ii) Η πρώτη μονάδα κάθε γραμμής βρίσκεται δίπλα της προηγούμενης.
iii) Οι μη-μηδενικές γραμμές εμφανίζονται πριν από τις μηδενικές.

Π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Μη κλιμακωτός $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Κλιμακωτός.

Αν επιπλέον ισχύει ότι πάνω και κάτω από το ηγετικό στοιχείο $\exists$ μηδενικά καλείται ανηγμένα κλιμακωτός.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Ανηγμένος κλιμακωτός

ΟΡΙΣΜΟΣ Δύο πίνακες καλούνται γραμμοϊσοδύναμοι αν ο ένας προέρχεται από τον άλλο με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν ανηγμένο κλιμακωτό. Δηλαδή $\exists$ στοιχειώδεις πίνακες $E_k, E_{k-1}, \dots, E_1$ ώστε $E_k \dots E_2 E_1 A$ να είναι ανηγμένοι κλιμακωτός.

ΠΡΟΤΑΣΗ: $M_i(\frac{1}{a})$ $\quad M_i(a)\, M_i(\frac{1}{a}) = I_{m\times m}$

$E_{ij} \cdot E_{ij} = I_{m\times m}$

$(A_{ij}(a))^{-1} = A_{ij}(-a)$

$A_{ij}(a)\, A_{ij}(-a) = I_{m\times m}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} E_{12}A$

$\Gamma_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} M_1(1/2)E_{12}A$

$\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 3\Gamma_1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} = A_{31}(-3)M_1(1/2)E_{12}A$

$\Gamma_2 \to \Gamma_3$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} M_2(2)E_{23}$ »

$\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 5\Gamma_2$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -32 \end{pmatrix} A_{32}(-5)M(2)»$

$\Gamma_3 \to -\frac{1}{32}\Gamma_3$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ανηγμένος.